Baljó S Árnyak

Pálvölgyi Dömötör

2005. május 35.

Katona Gyula egy régi tételére [3] (melyet tőle függetlenül J. B. Kruskal is belátott [4]) adunk új bizonyítást, mely egy korábbi, Frankl Pétertől származó bizonyítást rövidít [2]. A cikk írása közben jutott tudomásunkra, hogy R. Ahlswede és mások nevéhez fűződik a legújabb (2003) bizonyítás erre a tételre [1]. A mi bizonyításunk leginkább az övékre hasonlít (habár mi ezt nem ismertük), de a mienk egy kicsit egyszerűbb és a címünk is sokkal frappánsabb.

Az alapprobléma az alábbi: Adott S tetszőleges véges alaphalmazon egy $\mathcal{F}$ k-uniform halmazrendszer (azaz k elemű halmazokból álló halmazrendszer). Ekkor egy adott F halmaz illetve az $\mathcal{F}$ halmazrendszer *árnyéka* az alábbi halmazrendszer:

$$\sigma(F) := \{G : G \subset F, |G| = k-1\}$$
$$\sigma(\mathcal{F}) := \{\sigma(F) : F \in \mathcal{F}\}$$

0.1. Tétel. *[](Katona-Kruskal) Legyen $|\mathcal{F}| = \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_t}{t}$. (Jól ismert, hogy minden szám előáll ilyen alakban.) Ekkor $|\sigma(\mathcal{F})| \geq \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t-1}$.*

Feltehetjük, hogy az S alaphalmazon adott egy $<$ rendezés. Jelölje $min(H)$ ill. $max(H)$ a H legkisebb ill. legnagyobb elemét. Ez a rendezés értelemszerűen kiterjed S részhalmazaira is: $F < G \Leftrightarrow max(F \setminus G) < max(G \setminus F)$. (Ha $F \subset G$, ez értelmetlen, de mi csak ugyanakkora halmazokat fogunk összehasonlítani.) Ezt megint egy lépéssel továbbterjeszthetjük ugyanígy $\mathcal{P}(S)$-re, azaz S halmazrendszereire: $\mathcal{F} < \mathcal{G} \Leftrightarrow max(\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}) < max(\mathcal{G} \setminus \mathcal{F})$.

Az egyszerűség kedvéért z-vel fogjuk jelölni $\{z\}$-t egyelemű halmazok esetén. A bizonyítás kulcsa az alábbi operáció, melyet *balratömörítésnek* hívnak:

*0.2. **Definíció.** []Legyen $X, Y \subseteq S$, $|X| = |Y| \geq 1$, $X \cap Y = \emptyset$, $X > Y$. Ekkor*

$$\tau_{X,Y}(F) := \left\{ \begin{array}{ll} F \setminus X \cup Y & \textit{ha } X \subseteq F \textit{ és } Y \cap F = \emptyset \\ F & \textit{egyébként} \end{array} \right. ,$$

$$\tau_{X,Y}(\mathcal{F}) := \{\tau_{X,Y}(F) : F \in \mathcal{F}, \tau_{X,Y}(F) \notin \mathcal{F}\} \cup \{F : F \in \mathcal{F}, \tau_{X,Y}(F) \in \mathcal{F}\}.$$

Egy balratömörítést l-balratömörítésnek *hívunk, ha $|X| = l$.*
Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer l-baljó*, ha bármely τ l-balratömörítésre $\tau(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.*

Tehát egy halmazrendszer balratömörítettje egy ugyanannyi elemű halmazrendszer, mely ugyanakkora halmazokból áll. Ráadásul $X > Y$ miatt $\tau_{X,Y}(\mathcal{F}) \leq \mathcal{F}$. Másfelől, ha $\mathcal{F}$ nem minimális, akkor van hozzá egy $\tau_{X,Y}$ balratömörítés, ami egy másik halmazrendszerbe viszi; csak annyit kell tennünk, hogy garantáljuk, hogy $\mathcal{F}$ valamelyik eleme megszűnik a balratömörítés alatt: Legyen $\mathcal{G} < \mathcal{F}$. Ekkor van $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$, amikre $G < F$. Ekkor nyilván $F \notin \tau_{F \setminus G, G \setminus F}(\mathcal{F})$, tehát $\mathcal{F}$ valóban megváltozott a balratömörítés során. Az előző észrevétel miatt csakis kisebbedhetett, ebből következik, hogy csak egyetlen adott elemszámú halmazrendszer van, ami minden l-re l-baljó, méghozzá az, amelyik minimális a rendezés szerint.

Most megmutatjuk, hogy l-balratömörítés során az árnyék nem nőhet, ha a halmazrendszerünk már $(l-1)$-baljó volt a tömörítés előtt.

*0.3. **Lemma.** []Ha $\mathcal{F}$ $(l-1)$-baljó és $X, Y \subseteq S$, $|X| = |Y| = l$, $X \cap Y = \emptyset$, $max(X) > max(Y)$, akkor $|\sigma(\tau_{X,Y}(\mathcal{F}))| \leq |\sigma(\mathcal{F})|$.*

Bizonyítás. $\mathcal{B} := \sigma(\tau_{X,Y}(\mathcal{F})) \setminus \sigma(\mathcal{F})$, $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{F}) \setminus \sigma(\tau_{X,Y}(\mathcal{F}))$. Nekünk egy f: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ injektív leképezést kéne mutatnunk. Minden $B \in \mathcal{B}$ -re megmondjuk mi legyen $f(B)$. Tudjuk, hogy $B \cap X = \emptyset$, $|B \cap Y| \geq l-1$. Legyen $K = B \setminus Y$.

*0.4. **Állítás.** []$|B \cap Y| = l$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Y \setminus B = y$. Ekkor B nyilván $K \cup Y \in \tau_{X,Y}(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}$ árnyékaként állt elő. Tehát $K \cup X \in \mathcal{F}$. De ekkor $F := \tau_{X \setminus min(X), Y \setminus y}(K \cup X) \in \mathcal{F}$ az $l-1$-baljóság miatt. $B \in \sigma(F)$, ez pedig ellentmond $B \in \mathcal{B}$-nek. $\square$

Tehát $B = K \cup Y$. $A := f(B) := K \cup X$. Ez a függvény nyilván injektív. Mivel $B \in \mathcal{B}$, ezért $A \in \sigma(\mathcal{F})$, az előző gondolatmenethez hasonlóan. Csak azzal lehet baj, ha $A = \sigma(T)$, ahol $T \in \tau_{X,Y}(\mathcal{F})$. Ekkor nyilván $T \in \mathcal{F}$ is teljesülni fog. Két esetet különböztetünk meg:

1. eset: $T = A \cup z$, ahol $z \notin Y$. Ekkor $F := \tau_{X,Y}(T) \in \mathcal{F}$, különben nem lehetne a balratolás után még T a halmazrendszerünkben. De ekkor $B \in \sigma(F)$, ez pedig ellentmond $B \in \mathcal{B}$-nek.

2. eset: $T = A \cup y$, ahol $y \in Y$. Ekkor $F := \tau_{X \setminus min(X), Y \setminus y}(T) \in \mathcal{F}$ az $l-1$-baljóság miatt. Itt $F = K \cup Y \cup min(X)$, tehát ekkor $B \in \sigma(F)$, ez pedig ellentmond $B \in \mathcal{B}$-nek.
Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. $\square$

Tehát elég lenne a tétel bizonyításához azt megmutatnunk, hogy a $<$ szerint minimális $\mathcal{F}$-re $\sigma(\mathcal{F}) \geq \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t-1}$, de ez triviális. Ezzel a tételt beláttuk. $\surd$

Hivatkozások

[1] R. Ahlswede, H. Aydinian and L. H. Khachatrian, More about shifting techniques, European Journal of Combinatorics, 24 (2003) 551-556.

[2] P. Frankl, The shifting technique in extremal set theory, Combinatorial Surveys. (C. Whitehead, ed.), Cambridge Univ. Press, London/New York, 1987, 81-110.

[3] Gy. O. H. Katona, A theorem for finite sets, Theory of Graphs (P. Erdős and Gy. O. H. Katona, eds.), Hungarian Academy of Science, Budapest, 1966, 187-207.

[4] J. B. Kruskal, The number of simplices in a complex, Mathematical Optimization Techniques (R. Bellman, ed.), University of California Press, Berkeley, 1963, 251-278.