Számítástudomány gyakorlat

Kedd 10:15-11:45, online
9. feladatsor

1. Adj egy (RAM gépen) $\tilde{O}(n^2)$ idejű randomizált algoritmust, ami eldönti input A, B, C $n \times n$-es egész mátrixokról, hogy $A \cdot B = C$ igaz-e. Melyik osztályban van ez az algoritmus **RP**, **co-RP** és **BPP** közül?

2. Eldönthetelen egy leírásával adott randomizált, polinom időben futó Turing-gépről, hogy igaz-e, hogy minden x-et vagy legalább 1/2 eséllyel elfogad, vagy biztosan elutasít.

3. Mutasd meg például a **BPP**-ről, hogy ekvivalens definíciókat kapunk, ha
a) racionális számok az eloszlások (amik meghatározzák, hogy mikor merre lépünk tovább),
b) csak egy darab állapot van, ami 1/2–1/2 eséllyel lép két másikba,
c) van egy véletlen szalagunk, melynek minden mezője 1/2 eséllyel 0 és 1,
d) egy olyan pénzt ,,dobálhatunk", ami valamilyen ismeretlen, konstans p eséllyel lesz fej.

4.* Mutasd meg, hogyha az eloszlásról csak azt tesszük fel, hogy rekurzív, akkor $\mathbf{BPP} \not\subset \mathbf{EXP}$.

5. Legyen **PP** azon nyelvek osztálya, amikhez van minden inputra mindig polinomiális időben futó randomizált Turing-gép, ami $< 1/2$ eséllyel hibázik.
a) Mutasd meg, hogy $\textsc{sat} \in \mathbf{PP}$.
b) Mutasd meg, hogy ha a **PP**-t várható futásidővel definiáljuk, akkor az így kapott osztály pontosan a rekurzív nyelvek osztálya lesz.

6.* Egy adott konjuntív normálformáról valaki elárulja nekünk, hogy pontosan egy megoldása van (mint pl. egy Sudoku feladványnál). Mutassuk meg, hogy ha van polinomiális algoritmus, ami megtalálja a megoldást, akkor $\mathbf{RP} = \mathbf{NP}$.

7. Randomizált véges automata: Ugyanaz, mint a nemdeterminisztikus, csak minden éléhez hozzá van rendelve egy valószínűség, ez határozza meg, hogy merre mekkora eséllyel lép. Akkor fogad el egy szót, ha a futásainak $\geq \frac{2}{3}$-a elfogadja és akkor utasítja el, ha a futásainak $\leq \frac{1}{3}$-a fogadja el. Akkor ismer fel egy nyelvet, ha a nyelvbeli szavakat mind elfogadja és a nem nyelvbeli szavakat mind elutasítja (tehát semelyik szóra sem lehet határozatlan).
a)** Mutasd meg, hogy egyirányú randomizált véges automata csak reguláris nyelveket tud felismerni!
b)* Mutasd meg, hogy van olyan kétirányú randomizált véges automata, ami felismeri az $L = \{a^n b^n\}$ nyelvet!

8. Hogyan tesztelhetjük le gyoran, hogy q prímhatvány-e?

Javított feladatsorok a `http://domotorp.web.elte.hu/teaching/szamtud20/` honlapon.
A @címem domotor*@gmail.com, ahol a * helyére egy egybetűs bonyolultsági osztály neve kell.